

APLICAÇÃO DA ÁLGEBRA DE CLIFFORD NO ENSINO DA FÍSICA

APPLICATION OF CLIFFORD ALGEBRA IN TEACHING PHYSICS

Leonardo Diego Lins
UNEB/FASB

Leonardo Diego Lins é Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, área de concentração: Ensino de Física (UEPB), Especialista em Ensino de Matemática – FAINATIVISA. Professor da Universidade Estadual da Bahia (Uneb) e da Faculdade do Sul da Bahia (Fasb).

Email: leodlins@hotmail.com

Resumo: O ensino de Física, de maneira geral, é caracterizado pelo excesso de atenção dada a exercícios repetitivos, problemas resolvidos, pela utilização de uma sucessão de “fórmulas”, muitas vezes decoradas de forma literal e arbitrária, em detrimento de uma análise mais profunda visando à compreensão dos fenômenos físicos envolvidos. Particularmente, gostaríamos de destacar que um dos graves problemas tem sido o uso inadequado e desvinculado do ferramental matemático com relação à formulação e uso dos conceitos físicos. Isso gera uma dicotomia conceitual físico-matemática que prejudica a compreensão da profunda conexão entre estas duas ciências. Tendo em vista esses problemas de ordem matemática no processo de aprendizagem dos conceitos físicos, este trabalho pretende partir da crítica construtiva da linguagem matemática usada em física e introduzir uma nova abordagem físico-matemática conceitual utilizando os principais conceitos da dinâmica. Escolhemos a álgebra de Clifford como a linguagem matemática apropriada a esta abordagem físico-matemática conceitual. A operacionalização didática dos conteúdos é batizada pelo modelo cognitivista ausubeliano. Entendemos que o mesmo é o mais adaptável à concepção de material didático em ciências, pois, permite a exploração de forma hierárquica do universo cognitivo do aprendiz como também possibilita a manipulação deliberada deste universo para propiciar uma aprendizagem significativa.

Palavras-chave: Aprendizagem Significativa. Álgebra de Clifford. Ensino de Física.

Abstract: The teaching of physics in general, is characterized by excessive attention given to repetitive exercises, problems solved by the use of a succession of “formulas”, often decorated in a literal and arbitrary, rather than seeking a deeper analysis the understanding of the physical phenomena involved. Particularly, we would like to emphasize that one of the major problems has been the inappropriate use of mathematical tools and unbound with respect to the formulation and use of physical concepts. This generates a physical-mathematical conceptual dichotomy that affect the understanding of the deep connection between these two sciences. Given these problems mathematical order in the learning process of physical concepts, this paper intends to constructive criticism from the language used in mathematics and physics introduce a new approach using physical-mathematical conceptual key concepts of dynamics. We chose the Clifford algebra as the mathematical language appropriate to this physical-mathematical conceptual approach. The operationalization of the didactic content is baptized by the cognitive model ausubeliano. We understand that it is the most adaptable to design courseware in science, therefore, allows the exploitation of hierarchical form of the learner’s cognitive universe but also enables the deliberate manipulation of this universe to provide a meaningful learning.

Keywords: Meaningful Learning. Clifford Algebra. Physics Teaching.

INTRODUÇÃO

É fato notório que precisamos aplicar, em nossas escolas, uma constante ruptura de paradigmas, pois no nosso sistema de ensino os problemas existentes expressam a saturação do paradigma educacional, que não atende mais ao momento em que vivemos. Novas ideias, recursos tecnológicos e valores estão emergindo pelos vários segmentos da sociedade. Na procura do novo, muitos docentes buscam novos meios para se atualizarem na sua jornada em sala de aula. Para muitos deles, falar de planejamento, de objetivos, de conteúdo e de avaliação em Física é considerado utopia educacional, atividades que só funcionam na teoria, mas não na

prática. No caso específico da Física, aparentemente o status de “disciplina difícil” é aceitável pelo docente, pois explica os baixos resultados no rendimento escolar dos alunos, já previsível e que nada se pode fazer.

Tarefa difícil tem sido ensinar Física. As dificuldades intrínsecas somam-se aos problemas causados por uma visão distorcida da matéria, que se arrasta desde os primeiros momentos de contato. O problema mais relevante é o incessante desinteresse dos alunos, pois a Física, da forma que vem sendo tratada, só visando os vestibulares torna-se entediante, uma mesmice, um “*decoreba*” e, o pior, o aluno não vê aplicação do assunto em seu cotidiano.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio de Física (Brasil, 2006) procuram dar um novo sentido para o Ensino da Física, bem como construir uma visão voltada para a formação de um cidadão contemporâneo, atuante, solidário, crítico e reflexivo com instrumentos para compreender, intervir e participar de sua sociedade. Também mostram a necessidade de adaptação de novas metodologias para a melhoria da qualidade de ensino ofertado nas escolas.

Particularmente, gostaríamos de destacar que um dos graves problemas no ensino de Física tem sido o uso de uma linguagem matemática fragmentada, inadequada e dissociada dos conceitos físicos que ela representa. A fragmentação deve-se ao uso de diversas estruturas matemáticas nos diferentes domínios da Física, dificultando a conexão e passagem de uma para a outra. Muitas delas não proporcionam uma fácil intuição das propriedades físicas dos sistemas tratados. Pesquisas neste domínio (HESTENES, 2003a; 2003b; 1999; 1971; 1968; 1966; HESTENES; SOBCZYK, 1999) apontam para um sistema matemático composto pela álgebra de Clifford e o cálculo infinitesimal desenvolvido sobre ela, denominado cálculo geométrico, e apresentam características para ser uma boa candidata a uma linguagem unificada para a Física.

Esta estrutura matemática aplicada à Física proporciona uma fácil exploração intuitiva das propriedades dos sistemas estudados, da qual destacamos como principais características: uma máxima codificação algébrica dos conceitos geométricos básicos, tais como magnitude, direção, sentido (ou orientação) e dimensão; estabelece um método livre de coordenadas para formular e resolver equações básicas da Física; proporciona um método que uniformiza o tratamento da Física clássica, quântica e relativística evidenciando as estruturas comuns; permite uma fácil articulação com os sistemas matemáticos que estão amplamente em uso na Física, etc.

Em função das dificuldades apresentadas no estudo da Física em sua compreensão, aplicação dos seus fenômenos e na construção dos conceitos físicos no seu dia a dia, bem como o elevado número de reprovações mostra bem as dificuldades que os alunos encontram na aprendizagem de Física. É fato que a maior dificuldade apontada pelos professores da área é o desenvolvimento insuficiente dos conceitos matemáticos na sua base

a na sua aplicação na Física. Nosso objetivo foi construir estratégias para introduzir a álgebra de Clifford como modelador dos principais conceitos da dinâmica e a partir dos conceitos modelados desenvolver um material didático para o ensino de Física em nível médio à luz da concepção ausubeliana da aprendizagem. Dentro desse contexto, propomos uma adaptação desse novo aparato matemático para representar as principais grandezas estudadas na Física, em especial na mecânica, tais como massa, momento linear, momento angular, força e torque, em nível do ensino médio.

METODOLOGIA

Este trabalho tratou-se de uma pesquisa de cunho teórico-exploratório que objetivou construir estratégias para introduzir a álgebra de Clifford como modelador dos principais conceitos de uso na dinâmica, balizadas por uma concepção ausubeliana da aprendizagem, organizamos esse trabalho. Foram realizados estudos bibliográficos sistemáticos para caracterizar os conceitos fundamentais presentes no domínio da dinâmica em contextos diversos de abordagem epistemológica, bem como o estudo detalhado das propriedades da Álgebra de Clifford, tendo como propósito a aplicação deste novo formalismo na modelagem dos conceitos estudados.

Em seguida, os estudos concentraram-se na exploração conceitual e na utilização da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel para organizar os conceitos dentro de um modelo cognitivo. Foi buscada uma engenharia didática em que os conteúdos do domínio da dinâmica foram organizados a partir dos seguintes parâmetros: subsunçores, diferenciação progressiva e reconciliação integrativa. A partir destes parâmetros, foram construídos mapas conceituais dos conteúdos e por fim demonstramos a aplicação da Álgebra de Clifford nos principais conceitos da mecânica newtoniana.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O mapa conceitual é uma ferramenta poderosa no processo preparação de material didático. Ele permite explicitar a hierarquia apresentada pelos conceitos facilitando a assimilação no processo de aprendizagem. Tais mapas buscam traçar a representação conceitual do assunto, criando ligações com os modelos mentais ou esquemas conceituais que os aprendentes constroem a partir de suas interações no ambiente social e durante a sua aprendizagem. Balizado no exposto acima, propomos um mapa conceitual dos principais conceitos da mecânica newtoniana. Buscamos ao longo de sua confecção a incorporação dos fatores substantivos da facilitação pedagógica segundo a teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel.

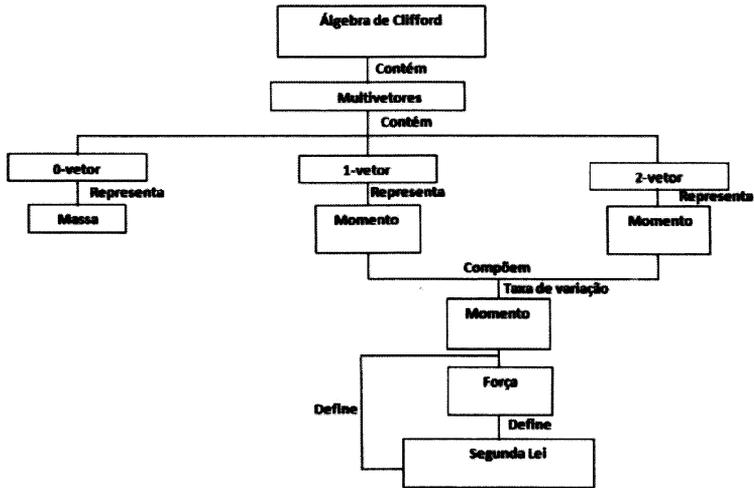


Figura 1 - Mapa conceitual referente aos principais conceitos da mecânica newtoniana

APLICAÇÃO CONCEITUAL

Uma das principais características da Álgebra de Clifford é nos permitir representar e manipular objetos geométricos de forma algébrica. Isto facilita a integração consistentemente dos conceitos físicos as suas representações geométricas. Assim, um elemento da álgebra de Clifford desenvolvido no espaço euclidiano em duas dimensões é representado por:

$$u = 0\text{-vetor} + 1\text{-vetor} + 2\text{-vetor}$$

onde,

$$0\text{-vetor} \Rightarrow \text{escalar}$$

$$1\text{-vetor} \Rightarrow \text{segmento de reta orientado}$$

$$2\text{-vetor} \Rightarrow \text{área orientada}$$

Nesse sentido, buscamos representar os conceitos físicos trabalhados por meio desta nova abordagem matemática. O conceito de massa de um corpo é uma característica intrínseca do mesmo e que representa a quantidade de matéria do objeto. Devido às características apresentadas por este conceito, a forma mais apropriada de representá-la é através de uma grandeza escalar, ou seja, um 0-vetor, pois a mesma fica completamente definida apenas pela sua magnitude, ou seja, por um número real positivo.

O momento linear de um corpo é uma grandeza física dada por um produto, entre a massa, que, como vimos é um 0-vetor e a velocidade, que é representada por um segmento de reta orientado, ou seja, uma quantidade que apresenta uma intensidade, um sentido e uma direção. Com

isso, podemos concluir que o momento linear possui a mesma direção e o mesmo sentido da velocidade cujo módulo é o produto da massa pelo módulo da velocidade (comprimento do segmento). Utilizando a nomenclatura da Álgebra de Clifford, o momento linear poderá ser representado por 1-vetor. Gostaríamos de lembrar que o momento linear apresenta a propriedade de que, na ausência de forças externas, ele se conserva.

Então, se denominamos \vec{p} o momento linear da partícula, m a massa da partícula e \vec{v} a sua velocidade, podemos escrever:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Onde o ponto representa a operação “produto por um escalar”. O interessante nesta abordagem é que momento linear passa a ser representado por um objeto matemático que pertence a uma estrutura algébrica, onde as operações usuais de soma, subtração, multiplicação e divisão estão definidas. E mais, nos permite operar conjuntamente e de forma mais elegante com outros conceitos físicos, como veremos mais adiante.

Já o momento angular de um corpo é uma grandeza física dada pelo produto vetorial entre o vetor posição, que, como vimos, é um 1-vetor e a quantidade de momento linear, que também é 1-vetor. Devido ao nosso interesse em desenvolver nossa argumentação física no plano, devemos substituir a representação matemática do momento angular. Com isso, se denominarmos \vec{L} o momento angular, \vec{r} o vetor posição e \vec{p} a quantidade de momento linear. O momento angular passa a ser representado por um objeto da álgebra de Clifford que é um 2-vetor. Assim a sua representação será:

$$L = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

Onde \wedge lê-se cunha.

Na literatura atual, o momento linear (1-vetor) e o momento angular (2-vetor) são expostos de forma distinta, porém a Álgebra de Clifford no plano é capaz de representá-los em uma única entidade matemática, ou seja, um multivetor, que é um elemento desse conjunto. Assim, denominando de \mathbf{P} o Momento Geral, podemos representá-lo pela combinação,

$$\mathbf{P} = \vec{p} + \lambda L$$

Onde λ é um fator de correção dimensional (PEZZAGLIA, 2008).

Uma das vantagens de se definir o momento desta forma é proporcionar uma visualização geométrica mais adequada ao conceito físico expressado por essa grandeza.

A taxa de variação desse Momento Geral \mathbf{P} em relação ao tempo é representada por:

$$\frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} = \frac{\Delta(\vec{p} + \lambda \vec{L})}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} + \lambda \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$$

O primeiro termo da última igualdade representa a taxa de variação do momento linear $\Delta \vec{p}$ em relação ao tempo Δt . Isto nada mais é que a força \vec{F} atuante em um corpo. Portanto, representaremos a força com um 1-vetor. O segundo termo da última igualdade representa a taxa de variação temporal do momento angular em relação ao tempo. Isto nos deve conduzir ao conceito de torque. Vejamos que o torque nos permite definir por um 2-vetor,

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L(t + \Delta t) - L(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) \wedge \vec{p}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \wedge \vec{p}(t)}{\Delta t}$$

Subtraindo e somando $\vec{r}(t + \Delta t) \wedge \vec{p}(t)$ ao numerador resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta L}{\Delta t} &= \frac{\vec{r}(t + \Delta t) \wedge \vec{p}(t + \Delta t) - \vec{r}(t + \Delta t) \wedge \vec{p}(t) + \vec{r}(t + \Delta t) \wedge \vec{p}(t) - \vec{r}(t) \wedge \vec{p}(t)}{\Delta t} \\ &= \left[\vec{r}(t + \Delta t) \wedge \frac{\vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t)}{\Delta t} \right] + \left[\frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \wedge \vec{p}(t) \right] \end{aligned}$$

Fazendo o intervalo de tempo Δt tão pequeno quanto se deseja, dá relação acima encontramos:

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t)$$

a posição em t ,

$$\frac{\Delta}{\Delta t} \vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t) = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

a taxa de variação temporal do momento linear e

$$\frac{\Delta}{\Delta t} \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

a taxa de variação temporal da posição.

Então teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} &= \vec{r} \wedge \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \wedge \vec{p} \\ &= \vec{r} \wedge \vec{F} + \vec{v} \wedge \vec{p}, \end{aligned}$$

Pois, a taxa de variação temporal do momento linear é a força \vec{F} . Por outro lado, o segundo termo da última igualdade é nulo, já que $\vec{v} \wedge m \vec{v}$ representa o produto de Grassmann de dois 1-vetor paralelos. Assim, o torque τ passa a ser um 2-vetor na nova representação, isto é,

$$\tau = \vec{r} \wedge \vec{F}.$$

Utilizando a álgebra de Clifford no plano, fomos capazes de representar a taxa da variação do Momento Geral \vec{P} em uma única entidade matemática. Esta entidade matemática representa a Força Geral F_G que atua no sistema. Portanto, podemos escrever:

$$\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = F_G = \vec{F} + \lambda \tau$$

Obtemos, assim, um multivetor, pois é a combinação de 1-vetor (\vec{F}) e um 2-vetor (τ). A expressão acima é, no novo formalismo, a representação do segundo princípio da dinâmica newtoniana.

CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo desenvolver um material didático no domínio da mecânica newtoniana, voltado para o o nível do ensino médio e superior. Seu percurso foi orientado pelo cognitivismo ausubliano juntamente com uma estrutura matemática denominada Álgebra de Clifford. Neste sentido, foram trabalhados os conceitos norteadores da aprendizagem significativa, como também os pilares conceituais da estrutura algébrica. O nosso estudo nos convenceu da grande vantagem didático-conceitual da utilização deste ferramental matemático para representar ou modelar os principais conceitos da dinâmica. Isto se deve em grande parte a capacidade desta álgebra de representar e manipular conceitos geométricos básicos tais como: magnitude, direção, sentido e dimensão.

A introdução de um novo objeto matemático, o multivetor, permitiu a compactação de diversos conceitos físicos como momento linear com momento angular e força com torque em um sistema consistente e

coerente de equações facilmente manipulável e interpretável, permitindo, assim, a incorporação natural dos conceitos físicos à estrutura algébrica utilizada na própria descrição do palco dos fenômenos físicos – o plano. Este extraordinário fato possibilitou uma nova representação do segundo princípio da mecânica newtoniana.

Evidentemente que vemos este trabalho como um “pontapé inicial” no processo de incorporação desta estrutura matemática – a Álgebra de Clifford, no processo de ensino-aprendizagem dos conceitos físicos. Entendemos que a sua continuidade parece ser imperativo.

REFERÊNCIAS

- AUSUBEL, David. **Aquisição e Retenção do Conhecimento: uma perspectiva cognitiva**. Tradução Lígia Teopisto. Lisboa: Plátano, 2003.
- BARCELOS, N.J. **Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana**. 1.ed, 2004.
- BRASIL. **Diretrizes Curriculares de Física para a Educação Básica**. Secretaria de Educação do Paraná. Curitiba: 2006.
- DE GÓES BRENNAND, E. **Fundamentos e aplicações da Álgebra de Clifford no Ensino de Física**. Nas aulas conferidas em pós-graduação em Ensino de Ciências na Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2008.
- _____. **Fundamentos e aplicações da Álgebra de Clifford no Ensino de Física**. Nas aulas conferidas em pós-graduação em Ensino de Ciências na Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2008.
- DORAN, Chris. **Geometric Algebra and its Application to Mathematical Physics**. Ph.D. thesis, University of Cambridge (1994)
- HESTENES, David. **New Foundations for Classical Mechanics**. London: Kluwer Academic Publishers, 2nd Edition, 1999.
- PEZZAGLIA, Jr. W. M. **Physical Applications of a Generalized Clifford Calculus: Papapetrou Equations and Metamorphic Curvature**, e-Print Archive: Gr-qc/9710027, 2008.
- MOREIRA, M. A. & MASINI, Elcie. F. Salzano. **Aprendizagem significativa: Teoria de David Ausubel**. São Paulo: Centauro, 2001.