

REVISTA

Mosaicum

Número 32, jul./dez. 2020 - eISSN 1980-4180

ANÁLISE DE LIVROS-TEXTOS DE CÁLCULO QUANTO À UTILIZAÇÃO DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Analysis of Calculus textbooks regarding the use
of semiotic representation records

Lais Couy

Mestre em Ensino de Ciências e Matemática (Universidade Federal
dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri)

E-mail: lais.couy@ufvjm.edu.br

 <https://orcid.org/0000-0003-1544-75297>

Fábio Silva de Souza

Doutor em Modelagem Computacional (Universidade Federal dos Vales
do Jequitinhonha e Mucuri) E-mail: fabiomatematico@yahoo.com.br

 <https://orcid.org/0000-0003-4323-5056>

Wederson Marcos Alves

Doutor em Engenharia Agrícola (Universidade Federal dos Vales
do Jequitinhonha e Mucuri) E-mail: wedalves@hotmail.com

 <https://orcid.org/0000-0002-1105-1300>

Weversson Dalmaso Sellin

Doutor em Matemática (Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri)

E-mail: weversson.sellin@ufvjm.edu.br

 <https://orcid.org/0000-0003-2595-8015>



Artigo publicado em acesso aberto (*Open Access*) sob a licença Creative Commons Attribution, que permite uso, distribuição e reprodução em qualquer meio, sem restrições desde que o trabalho original seja corretamente citado.

Resumo: Diversos fatores interferem no processo de ensino-aprendizagem, entre eles a forma de abordagem dos conceitos nos livros didáticos adotados pelos professores em sala de aula. Objetivou-se neste artigo analisar a forma de abordagem dos conceitos relativos a “Limites de Função de Uma Variável Real” em três livros didáticos sobre Cálculo. Os estudos foram realizados à luz dos estudos de Duval (2003), principalmente em relação aos registros de representação semiótica. Percebeu-se, pelas análises, que duas obras apresentam os vários registros de representação na exposição teórica, mas supervalorizam as manipulações algébricas nos exercícios, não explorando satisfatoriamente outras formas de representação. Já em outra obra, verificou-se a utilização de uma abordagem que estimula a transição entre as várias linguagens matemáticas, tanto na exposição teórica como nas atividades práticas, o que pode contribuir para que o estudante compreenda, efetue e controle a diversidade de processos matemáticos propostos numa situação de ensino.

Palavras-chave: Ensino de cálculo. Registros de representação. Formação de professores. Livro didático.

Abstract: Several factors interfere in the teaching-learning process, among them the way of approaching the concepts in textbooks adopted by teachers in the classroom. The aim of this article was to analyze a way of approaching the concepts related to “Limits of Function of a Real Variable” in three textbooks of Calculus. The studies were carried out in the light of the studies by Duval (2003), mainly in relation to the records of semiotic representation. It was noticed, through the analyzes, that two works present the various representation registers in the theoretical exposition, but overvalue the algebraic manipulations in the exercises, not satisfactorily exploring other forms of representation. In another work, there was the use of an approach that stimulates the transition between the various mathematical languages both in the theoretical exposition and in the practical activities, which can contribute for the student to understand, carry out and control the diversity of mathematical processes proposed in a teaching situation.

Keywords: Calculus teaching. Representation records. Teacher training. Textbook.

INTRODUÇÃO

O ensino-aprendizagem dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral tem se consolidado como um importante campo de pesquisa na Educação Matemática. Neste estudo, os autores discutem parte dos estudos desenvolvidos sobre essa temática, pelo Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática (GEPEMA), composto principalmente por docentes do Curso de Licenciatura em Matemática da UFVJM (Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri).

As experiências vivenciadas nas turmas do Curso de Matemática contribuem para que os pesquisadores considerassem que seria necessá-

rio investigar quais fatores podem favorecer a aprendizagem dos conceitos introdutórios do Cálculo, pelos alunos ingressantes e, ainda, para a compreensão sobre a dificuldade dos estudantes concluintes em realizar satisfatoriamente a transição dos conceitos estudados para a abordagem formal da Análise Real.

Nessa perspectiva, considerou-se importante analisar a abordagem dos conceitos nos livros didáticos utilizados pelos docentes, visto que se trata de um importante recurso utilizado pelos professores para o planejamento de suas aulas.

Considerando essas reflexões, definiu-se o estudo de “Limites de uma função real” como foco da pesquisa, por ser o primeiro assunto estudado na disciplina Cálculo I. Além disso, também constitui, pela experiência dos professores, um conceito de difícil assimilação pelos estudantes, no momento de se realizar um estudo formalizado no Curso de Análise Real.

Foram escolhidos como objeto de estudo três livros didáticos sobre cálculo: **Cálculo – v. 1** (STEWART, 2009), **Cálculo com geometria analítica** (SIMMONS, 1987) e **Um curso de cálculo – v. 1** (GUIDORIZZI, 2007). Após a seleção, procedeu-se à análise do texto, dos exemplos resolvidos e atividades sugeridas, à luz dos estudos de Duval (2003), principalmente em relação aos registros de representação semiótica.

| 83 |

Os estudos e discussões contribuíram para a formulação da seguinte questão de pesquisa: Como são abordados os conceitos sobre Limites de Funções de uma variável, em relação aos registros de representações semióticas e a transição entre eles, em livros de Cálculo?

INTERLOCUÇÕES TEÓRICAS

O ensino-aprendizagem dos conceitos de Cálculo tem sido o foco de diversos estudos nacionais e internacionais (RASMUSSEN, MARRONGELLE; BORBA, 2014; IGLIORI e ALMEIDA, 2017; TALL, 1991; TALL, 2013; LACHINI, 2001; FROTA, 2002; COUY, 2008). O crescimento no número de pesquisas pode ter sido impulsionado não só pela aplicabilidade aos diversos contextos e áreas do conhecimento, mas também pelas dificuldades apresentadas pelos alunos iniciantes no estudo do Cálculo Diferencial.

Considerando que um bom número de alunos em todo o mundo estuda cálculo, seja nos níveis médio ou superior, a pesquisa sobre aprendizagem, ensino e compreensão do cálculo tem o potencial de ter amplo impacto. Além disso, é fundamentalmente importante ressaltar que o campo de pesquisa sobre aprendizagem, ensino e compreensão de cálculo contribua de forma coerente para a prática de educar milhões de alunos que se matriculam em cursos de cálculo a cada ano. (RASMUSSEN, MARRONGELLE; BORBA, 2014 – Tradução nossa).

Muitas vezes, o insucesso inicial dos estudantes tem como justificativa dos professores a *falta de base* em relação aos pré-requisitos clássicos como funções, trigonometria e polinômios. No entanto, percebe-se que, mesmo em cursos que ofertam em sua estrutura curricular disciplinas que têm o objetivo de funcionar como um “*pré-cálculo*”, ainda se constata um alto índice de reprovação no Cálculo I. Uma justificativa para isso pode estar no estranhamento inicial em relação à terminologia e notação não-familiares, próprios desse conhecimento, aos estudantes recém-chegados do ensino médio.

| 84 |

As pesquisas indicam que essas situações ocorrem em diversos cursos em que o Cálculo figura como disciplina obrigatória. Os pesquisadores participantes deste trabalho verificaram que tal realidade também se constata no curso de Licenciatura em Matemática no qual atuam. Apesar de, na estrutura curricular, constar como pré-requisito para o Cálculo Diferencial e Integral I disciplinas de Matemática Básica, na qual são estudados os conceitos, propriedades, operações e representações das funções elementares, o índice de reprovação no Cálculo I, nos 3 últimos semestres em que a disciplina foi ofertada, referentes aos anos 2018 e 2019, foi de 72,22; 46,15 e 50%, respectivamente.

Um questionamento inicial poderia ser em relação às escolhas metodológicas do professor na condução de um curso de Cálculo e quais fatores influenciam essa decisão. Nesse aspecto, os livros-textos assumem um papel importante.

Para subsidiar o trabalho de análise, alguns textos e pesquisas já realizadas sobre ensino de Cálculo foram estudados preliminarmente (IGLIORI e ALMEIDA, 2017; RASMUSSEN, MARRONGELLE; BORBA 2014; TALL, 1991; COUY, 2008; BERRY e NYMAN, 2003; FROTA, 2002;). A partir desses estudos iniciais, verificou-se que um caminho apontado pelo movimento conhecido como *Calculus Reform*, impulsionado pela “Conferência de Tulane”, ocorrida em 1986, para uma aprendizagem significativa dos conceitos, seria a aplicação da “*Regra de Três*”,

apresentando os conceitos geométrica, numérica e algebricamente, numa perspectiva que permita a interlocução entre as várias formas de representação. Mais tarde, foi expandida para a *Regra de Quatro*, com o acréscimo do ponto de vista verbal ou descritivo.

Nesse caminho, sinalizado pelo Movimento de Reforma do Cálculo, Couy (2008) realizou uma pesquisa com estudantes de Cálculo em cursos de formação inicial e continuada de professores, aplicando atividades que estimulassem o pensamento visual e a transição entre as representações pois

promover o estudo de cálculo na perspectiva apresentada pode contribuir para que o cálculo assuma num curso de licenciatura um papel abrangente e integrador. Os professores, muitas vezes, engessados pelas “grades” curriculares, apressam-se em introduzir o instrumental simbólico, não dedicando o tempo necessário às reflexões que podem suscitar das conexões entre as várias representações matemáticas e que certamente poderiam contribuir para um entendimento “relacional” dos conceitos de cálculo. (COUY, 2008, p. 100).

Nessa perspectiva de valorizar as várias linguagens matemáticas, foram tomados como referência os estudos de Duval (2003) sobre a influência dos *registros de representação semiótica* no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Segundo ele, numa alusão a Descartes, o termo *registro* foi adotado para designar os diferentes tipos de representações semióticas utilizadas na matemática, como os sistemas de numeração, as figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, os gráficos e a língua natural (DUVAL, 2003).

Duval (2003, p. 14) também destaca a possibilidade de utilização simultânea de dois ou mais *registros de representação*, bem como a troca entre eles, como um diferencial da atividade matemática em relação às demais ciências. O autor classificou dois tipos de transformação de representações semióticas: os *tratamentos*, quando ocorrem transformações de representações dentro de um mesmo registro, e as *conversões*, quando há conservação do objeto, mas ocorre mudança do registro. Dentro do tema “Limites”, apresentado neste trabalho, o tratamento poderia ocorrer, por exemplo, quando se calcula o limite de uma função unicamente por meio da manipulação algébrica, pois não há mudança de registro. Já a obtenção, por meio da inspeção gráfica, de valores de para valores reais quaisquer de a seria uma conversão, pois o *registro de partida* é geométrico ou gráfico

e o de *chegada* é simbólico-algébrico. É importante esclarecer que, nessa avaliação, os pesquisadores consideraram principalmente o tipo de registro predominante requerido para resolução e não simplesmente o resultado, que por vezes é numérico.

Para a análise dos livros, utilizou-se a classificação dos registros de representação semiótica sugerida por Karrer (2011). No sentido de contribuir para uma melhor compreensão dessa categorização, apresenta-se na tabela 1, exemplos de registros de representação semiótica relacionados à temática deste trabalho.

Tabela 1: Classificação dos registros de representação semiótica

Tipo de registro	Representações	Exemplo						
Registro simbólico	Representação simbólico-algébrica							
Registro gráfico	Representação gráfica							
Registro numérico	Representação tabular	X	1,01	1,001	0,9	0,99	0,999	
		f(x)	2,01	2,001	1,9	1,99	1,999	
Registro da língua natural	Representação da língua natural de emprego comum (analisada em situações-problema)	À medida que x se aproxima de a , tanto por valores menores como maiores que a , os valores da função se aproximam cada vez mais de L .						

| 86 |

O tratamento é mais valorizado nas atividades matemáticas, pois a conversão não tem papel intrínseco nos processos de justificação ou de prova (DUVAL, 2003). No entanto, caso se pretenda “[...] analisar as dificuldades de aprendizagem em matemática, é preciso estudar prioritariamente a conversão das representações e não os tratamentos”. (DUVAL, 2003, p. 30).

No seu estudo, Duval (2003) não se restringe ao campo matemático e sua história, mas adota uma abordagem cognitiva, afirmando ainda que a originalidade dessa abordagem “[...] está em procurar inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que permite ao aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade de processos matemáticos que lhe são propostos numa situação de ensino (Id. Ibid, p. 12”. Dessa forma, a análise das atividades matemáticas dos livros-textos foi realizada de acordo com a proposta de Duval (2003), numa perspectiva de aprendizagem (e de ensino) e não de pesquisa matemática por matemáticos.

METODOLOGIA

Para a elaboração das observações, foram utilizados como metodologia os procedimentos da pesquisa bibliográfica. Foram realizadas as leituras *exploratória, analítica e interpretativa* (GIL, 2007). A primeira, para estudo dos textos que fundamentaram teoricamente a pesquisa, e a segunda e terceira, na análise dos livros didáticos.

Também buscou-se verificar os procedimentos adotados em relação à revisão literária das obras analisadas e adotou-se a revisão sistemática, pois “[...] é um método de investigação científica com um processo rigoroso e explícito para identificar, selecionar, coletar dados, analisar e descrever as contribuições relevantes a pesquisa (FERENHOF; FERNANDES, 2016, p. 2). Procurou-se adotar as etapas da revisão sistemática, proposta por Levy e Ellis (2006): a) conhecer a literatura; b) compreender a literatura; c) aplicar a revisão; d) analisar resultados; e) compilar resultados (síntese); f) avaliar resultados.

Seguindo estes procedimentos, procedeu-se ao estudo do(s) capítulo(s) referente(s) aos conceitos introdutórios sobre “Limites de Função de Uma Variável” em seis obras: Finney e Giordano (2003), Fleming e Gonçalves (2009), Santos e Bianchini (2002), Stewart (2009), Guidorizzi (2007) e Simonns (1987). A partir disso, com uma melhor compreensão da literatura, optou-se por analisar três dos livros didáticos: Cálculo – v.1 (STEWART, 2009), Cálculo com Geometria Analítica (SIMMONS, 1987) e Um Curso de Cálculo – v.1 (GUIDORIZZI, 2007). Essa escolha se deu porque o primeiro é o mais utilizado pelos professores e alunos do Curso de Matemática, no qual a pesquisa foi realizada. O segundo foi selecionado em virtude das intenções demonstradas pelo autor no prefácio, sobre a necessidade da elaboração de livros de cálculo que apresentem o conteúdo de maneira contextualizada, tornando-os próximos dos estudantes. Por fim, o terceiro livro foi selecionado, por se tratar de uma referência clássica, em virtude da abordagem técnica, característica destacada pelo autor no prefácio. Considerou-se também, analisar obras com diferentes perspectivas de abordagem, visto que foram constatadas semelhanças na forma de abordagem dos livros selecionados com os descartados.

Escolhidos as obras, foi realizada a revisão e, em seguida, a análise dos dados, utilizando-se como referência principal a teoria de Duval

(2003), quanto aos registros de representação semiótica. Nesse processo, foram necessários vários momentos de discussão entre os pesquisadores para a compilação dos dados e avaliação dos resultados. Os estudos iniciaram há cerca de dez anos e foram retomados e ampliados a partir de 2019.

RESULTADOS E APRESENTAÇÃO DOS DADOS

Nos tópicos a seguir, apresentam-se os livros analisados e, após a exposição das observações realizadas, discutem-se os dados. Essa organização se justifica, pois não era intenção dos pesquisadores realizar uma comparação entre elas e sim analisar isoladamente cada uma, em relação à categorização de registros sugerida por (DUVAL, 2003).

Livro 1 – Cálculo – Autor: James Stewart

| 88 |

No prefácio, o autor destaca a proposta do livro, que se baseia na compreensão de conceitos, norteado pelo movimento de reforma do ensino de cálculo. Para atingir esse objetivo, o autor baseia-se na chamada *Regra de Quatro*.

Ainda no prefácio, são apresentadas as características gerais do livro, destacando-se as seções denominadas “Projetos” e “Problemas Quentes”. A primeira explora quatro tipos de projetos: os “Projetos Aplicados” que visam, por meio de aplicações, despertar a imaginação dos estudantes; com objetivo de utilizar as tecnologias, principalmente as computacionais, são propostos os “Projetos de Laboratório”; os “Projetos Escritos” objetivam o estímulo à pesquisa pelos alunos, procurando estabelecer um paralelo entre os métodos atuais e aqueles utilizados nos primórdios do desenvolvimento do cálculo; já os “Projetos de Descobertas” “incentivam a descoberta por meio da percepção de padrões ou antecipam questões a serem aprofundadas posteriormente”.

Nas seções “Problemas Quentes”, são abordados problemas em que não há um único procedimento bem definido para chegar à solução, buscando-se explorar a utilização de estratégias diversificadas de resolução de problemas, visando a instrumentalização e a compreensão conceitual. O

autor inclui, após o capítulo 1, uma seção denominada “Princípios para a Resolução de Problemas”, na qual são descritos os quatro estágios propostos por George Polya para a resolução de problemas: “Entendimento do problema”, “Planejamento da solução”, “Cumprimento do plano de solução” e “Revisão da solução”.

O conceito de Limite de Função de uma Variável Real é apresentado no Capítulo 2 – Limites e Derivadas, especificamente nas Seções 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4. Na Seção 2.1, é discutido como surge a noção de limite, explorando os problemas de determinar a tangente a uma curva e a velocidade de um objeto.

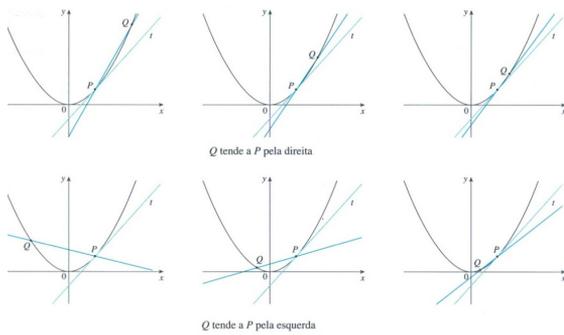
O autor propõe um problema (página 73, o exemplo 1) com o seguinte enunciado: “Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y=x^2$ no ponto $P(1,1)$ ”. Na resolução, para se determinar a equação da reta tangente à parábola $y=x^2$ no ponto $P(1,1)$, são explorados alguns registros de representação semiótica, dentre eles: o “numérico” (Tabela 2), em que são tabelados para vários valores da variável x , o valor correspondente m_{PQ} (coeficiente angular da secante que passa por P e $Q(x,x^2)$); o “geométrico” (Figura 1), à medida que Q se aproxima de P ao longo da parábola $y=x^2$, as retas secantes que passam por P e Q , tendem à reta tangente.

Nesse exemplo, percebe-se que houve uma transformação do tipo *conversão* entre os registros numérico e geométrico. Além disso, nota-se também uma transformação do tipo *conversão* entre os registros simbólico algébrico e geométrico, quando se utiliza da expressão algébrica da função e do seu gráfico, bem como da expressão algébrica que dá a equação da secante por P e Q e sua representação gráfica conforme Figura 1. Outra transformação do tipo *conversão* percebida nesse exemplo é a transformação do registro algébrico (que fornece o coeficiente angular da secante por P e Q) no registro numérico da Tabela 2.

Tabela 2: Coeficiente angular da secante por P e Q (Adaptada de STEWART, 2009)

X	2	1,5	1,1	1,01	1,001	0	0,5	0,9	0,99	0,999
	3	2,5	2,1	2,01	2,001	1	1,5	1,9	1,99	1,999

Figura 1: Reta secante por P e Q



Fonte: Stewart (2009)

| 90 |

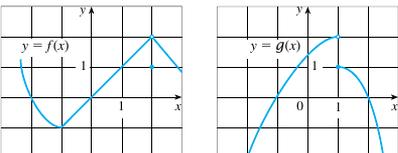
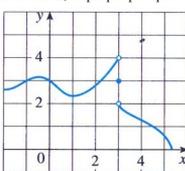
Na Seção 2.2, o conceito de limite de uma função de uma variável real é definido, usando como registro de representação semiótica a linguagem natural. Explora-se o conceito de limite de uma função de variável real de forma intuitiva, por meio de registros geométricos (gráfico das funções) e também de dados numéricos calculados nas “proximidades” do ponto, no qual se deseja calcular o limite da função. Na visão dos pesquisadores, os exemplos apresentados são bem elaborados, permitindo a mudança de registros, principalmente entre os algébricos, geométricos e numéricos. Apresenta-se, também, a definição de limites laterais, assíntota vertical, bem como é discutido de modo informal a ideia de limites infinitos.

Na Seção 2.3, as principais propriedades operatórias sobre limites são abordadas, mas sem demonstração formal dos resultados. Nessa seção, percebe-se uma concentração de mudanças do tipo tratamento nos registros de representação semiótica, principalmente envolvendo o registro algébrico, utilizando-se dos teoremas e de manipulações algébricas para determinar os limites das funções propostas nos exercícios e exemplos.

Somente na Seção 2.4 a definição formal de limite é dada e faz-se a explanação do significado de ϵ e δ , utilizando-se do registro simbólico algébrico como representação semiótica. Após a definição formal de limite, são apresentadas duas interpretações geométricas dessa definição: uma representando a função, por meio de diagrama de flechas e analisando o significado do ϵ e δ ; outra, por meio do gráfico da função evidenciando o significado de ϵ e δ , como representantes do acréscimo infinitesimal ao redor do ponto em que se deseja analisar o limite da função.

Os exemplos resolvidos e exercícios propostos no livro exploram de forma considerável a variação entre os registros de representação, tanto de partida como de chegada, o que permite transformações do tipo conversão, e isso, segundo Duval (2003), é fundamental para a compreensão em Matemática. Alguns exemplos dessas atividades são mostrados na Tabela 3.

Tabela 3: Exemplos de transformações de registros utilizados em Stewart (2009)

Transformações de Registro utilizadas no livro																
Registro de Partida	Registro de Chegada	Qtde Exercícios	Exemplo	Transformação realizada												
Algebrico	Algebrico	75	Calcule o limite, se existir. $11 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$	Tratamento												
Algebrico	Numérico	16	Faça uma conjectura sobre o valor do limite (se ele existir) por meio dos valores da função nos números dados (com precisão de seis casas decimais). $17 \cdot \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$, $x=2,5, 2,1, 2,05, 2,01, 2,005, 2,001, 19, 1,95, 1,99, 1,995, 1,999$	Conversão												
Algebrico	Gráfico	27	Use o gráfico da função $f(x) = 1/(1+e^{1/x})$ para dizer o valor do limite, se existir. Se não existir, explique por quê. (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$	Conversão												
Algebrico	Língua Natural	13	Explique com suas palavras o significado da equação $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$. É possível que a equação anterior seja verdadeira, mas que $f(2)=3$? Explique.	Conversão												
Numérico	Numérico	3	A tabela mostra a posição de um ciclista: <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tr> <td>t</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>S</td> <td>0</td> <td>1,4</td> <td>5,1</td> <td>10,7</td> <td>17,7</td> </tr> </table> (a) Encontre a velocidade média nos períodos de tempo a seguir: (i) [1,3] (ii) [2,3] (iii) [3,5] (iv) [3,4]	t	0	1	2	3	4	S	0	1,4	5,1	10,7	17,7	Tratamento
t	0	1	2	3	4											
S	0	1,4	5,1	10,7	17,7											
Numérico	Gráfico	4	Esboce o gráfico de um exemplo de uma função que satisfaça todas as condições dadas. 13. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2$, $f(1) = 2$.	Conversão												
Gráfico	Língua natural e numérico	3	Os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ são dados. Use-os para calcular cada limite. Caso não exista o limite, explique por quê.  a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$	Conversão												
Gráfico	Numérico	10	Para a função, cujo gráfico é dado, diga o valor de cada quantidade indicada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.  a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ e) $f(3)$	Conversão												

Livro 2: Cálculo com Geometria Analítica Vol. I – Autor: George F. Simonns

No prefácio do livro **Cálculo com Geometria Analítica - v. I**, o autor traz a intenção de que o livro possa ser utilizado em toda espécie de curso superior, embora tenha sido elaborado numa perspectiva de curso-padrão de três semestres para os estudantes dos cursos de Ciências, Engenharia ou Matemática. O autor ainda destaca que, em muitas ocasiões, o estudo de Cálculo pode se tornar um tanto técnico demais, razão pela qual os alunos poderiam sentir-se desmotivados em prosseguir seus estudos. Dessa forma, o autor se propõe a elaborar uma abordagem mais intuitiva, ressaltando os aspectos geométricos dos conceitos desenvolvidos e suas possíveis aplicações. Além disso, o autor ressalta que, no decorrer do livro, os alunos depararão com textos históricos, numa tentativa de contextualizar os assuntos desenvolvidos. Dessa forma, as ideias abordadas se tornariam mais acessíveis aos estudantes, o que facilitaria sua posterior compreensão e despertaria o interesse em seus estudos.

| 92 |

O tópico *Limites de Funções de uma Variável Real* é abordado no capítulo 2 – A Derivada de uma Função - um caminho adotado para facilitar a análise da derivada de uma função. Nesse caso, o autor opta por apresentar de maneira intuitiva o conceito de derivadas, por meio do estudo de retas tangentes a gráficos de funções, para justificar a análise mais criteriosa do conceito de limite.

Uma vez feita essa discussão, o autor passa a conceituar limite, por meio da análise do gráfico de uma função. Nessa análise, o conceito de limite de função em um ponto real é apresentado de maneira bastante intuitiva, sendo definido como o número real do qual os valores da imagem de uma função se aproximam quando os valores do domínio se aproximam do ponto . Nesse momento, é destacado que não importa o valor da função no ponto em questão, mas sim o que ocorre ao redor de valores próximos ao ponto.

Os exemplos relacionados na Tabela 4 exploram de maneira intuitiva o conceito de limite e limites no infinito, para chegar à dedução das fórmulas usuais de operações com limites. É necessário ressaltar que, em nenhum momento, há a demonstração de fórmulas, mas simplesmente a dedução intuitiva delas.

Nos exercícios propostos, é possível observar que, na maioria dos casos, o registro de representação de chegada solicitado é o numérico. Ou-

tros registros de representação não chegam sequer a ser explorados, como o gráfico, embora a abordagem do conceito de limites adotada pelo autor baseie-se fortemente na análise de gráficos.

Apesar da discussão e conceituação de limites ser fortemente gráfica, é perceptível a ausência de exercícios que explorem a representação gráfica. Na realidade, a maioria das atividades apresentadas limita-se a solicitar a determinação numérica de limites e, para a resolução de tais exercícios, são necessárias apenas manipulações algébricas. Dessa forma, o estudante não é colocado em situações nas quais seja necessária a verificação gráfica de limites, o que facilitaria a compreensão dos conceitos de aproximação infinitesimal representados pelas letras e e ϵ .

Da mesma forma, a manipulação algébrica de limites é pouco explorada no decorrer da explanação do conteúdo. Portanto, causa certa estranheza verificar a quantidade de exercícios algébricos solicitados. A manipulação algébrica de limites é tratada de maneira incipiente pelo autor. Portanto, o texto-base carece de exemplos e outras explanações nesse sentido, o que permitiria ao estudante uma melhor assimilação do cálculo com limites.

Tabela 4: Exemplos de transformações de registros utilizados em Simmons (1987)

Transformação de Registros Utilizada no Livro				
Registro de Partida	Registro de Chegada	Nº de Exercícios	Exemplo	Transf. Realizada
Simbólico Algébrico	Simbólico Algébrico	58	Alguns dos limites existem e outros não. Calcule aqueles que existem. 8)	Tratamento
Língua Natural	Registro gráfico	05	58) Considere a função definida para x onde n denota o maior inteiro $\leq x$. Esboce o gráfico dessa função para $x \geq 0$ e também para $x < 0$. Como se comporta quando x tende a zero pelo lado positivo? Pelo lado negativo? O limite existe?	Conversão

Por fim, é necessário ressaltar que a conversão entre os registros de representação geométricos e os registros de representação algébricos não é explorada. De fato, o estudante analisa em diversas ocasiões o conceito geométrico de limite, porém não verifica algebricamente as formas de cálculo com limites. Na visão dos pesquisadores, isso pode se tornar um dificultador da compreensão global do conceito de limite, visto que o estudante é estimulado a enxergar graficamente o limite, entretanto provavelmente apresentará dificuldades na manipulação de outros registros de representação.

Livro 3 - Um Curso de Cálculo – Vol. I – Autor: Hamilton Luiz Guidorizzi

Hamilton Luiz Guidorizzi registra, no prefácio do livro, apenas a forma de utilização do livro, ressaltando alterações de caráter técnico para a 5ª edição. Ainda informa que os conteúdos serão desenvolvidos, sempre que possível, a partir de uma situação-problema para a motivação ao estudo.

O tópico Limites de Funções de uma Variável Real é apresentado no capítulo 3 (Limites e Continuidade) e capítulo 4 (Extensões do Conceito de Limite). A motivação apresentada refere-se ao estudo de funções contínuas. O autor opta por introduzir o conceito de continuidade por meio da visualização dos gráficos de funções e, paralelamente a esse conceito, introduz o conceito de limite. Aparentemente, a abordagem inicial do autor não permite associar o conceito de limite ao conceito de continuidade, embora ambos sejam apresentados por gráficos.

Os exemplos postos em seguida abordam o uso de tabelas e manipulações algébricas para a determinação de limite. São colocados alguns gráficos para facilitar a visualização do limite das funções analisadas nos exemplos.

| 94 |

Em seguida, o autor faz uma breve explanação do conceito geométrico de continuidade, associando-o ao conceito de limite. Prosseguindo na exposição, introduz o conceito de diferenciabilidade e, a partir daí, justifica o estudo de limites ao observar que toda derivada é um limite.

A partir desse ponto, o autor opta por apresentar a definição algébrica de continuidade e, para tanto, faz uma série de observações com exemplos de gráficos de algumas funções, a fim de explicar o que seriam os acréscimos infinitesimais expressos pelas letras gregas ϵ e δ . De maneira análoga, são apresentados ao estudante o conceito algébrico de limite e vários exemplos de como demonstrar analiticamente o valor do limite de uma função.

Segue-se, à discussão do conceito, uma série de exemplos resolvidos, focando principalmente as técnicas de manipulação algébrica para o cálculo de limites. Em seguida, o autor introduz o conceito de limite lateral, de maneira análoga à realizada na explanação inicial, porém a discussão é mais sucinta. Ainda, no capítulo 3, faz uma breve explicação sobre limites de funções compostas e introduz a técnica de mudança de variáveis para o cálculo de limites. Para encerrar o capítulo, é apresentado ao estudante o limite trigonométrico fundamental e as demonstrações das propriedades operatórias de limite e do teorema do confronto.

O capítulo 4 inicia-se com o conceito de limites no infinito e posteriormente passa-se para o conceito de limite infinito. Em ambos os casos, é perceptível que o autor se preocupa mais com as técnicas operatórias do que com a visualização geométrica de tais limites. Com efeito, todos os exemplos acerca de tais assuntos envolvem apenas cálculos matemáticos ou demonstrações formais.

Tabela 5: Exemplos de transformações de registros utilizados em (GUIDORIZZI, 2007)

Transformação de Registros Utilizada no Livro				
Registro de Partida	Registro de Chegada	Nº de Exercícios	Exemplo	Transf. Realizada
Língua Natural	Gráfico	02	1) Esboce o gráfico da função dada e, utilizando a ideia intuitiva de função contínua, determine os pontos em que a função deverá ser contínua. a) em .	Conversão
Simbólico-algébrico	Simbólico-algébrico	19	2) Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule:	Tratamento
Língua Natural	Língua Natural	74	1) Prove, pela definição, que a função dada é contínua no ponto dado. a) em .	Tratamento
Simbólico - algébrico	Simbólico – algébrico	06	3) Seja definida em \mathbb{R} e um real dado. Suponha que Calcule: a)	Tratamento

Na Tabela 5, são apresentados alguns dos exercícios propostos pelo autor. É perceptível, por meio desses exemplos, que o registro de chegada mais solicitado é a língua natural associado ao simbólico-algébrico, pois numa parte significativa destes é solicitado ao estudante que demonstre afirmações matemáticas. Outros registros de representação como o gráfico e o geométrico são subutilizados. De certo modo, causa estranheza o fato de que, embora a abordagem inicial adotada pelo autor seja gráfica, os exercícios não solicitem ao aluno utilizar esse tipo de linguagem matemática. Tal registro de representação poderia facilitar, por parte do estudante, a compreensão do conceito de limite.

Conforme deixa indicado em seu prefácio, o autor apresenta inúmeras técnicas de cálculo de limites. De fato, a abordagem adotada pelo autor é bastante técnica e os exercícios propostos são rotineiros, limitando-se à repetição de técnicas explanadas anteriormente. Dessa forma, o estudante é incentivado a treinar técnicas usuais de cálculo, mas pode ter dificulda-

des para assimilar plenamente conceitos fundamentais inerentes ao limite, como os acréscimos infinitesimais.

Na realidade, embora os acréscimos infinitesimais sejam apresentados em gráficos e solicitados com certa frequência nos exercícios propostos, pouco se discute a respeito do seu significado real tanto do ponto de vista algébrico quanto geométrico.

Por fim, cabe ressaltar que a conversão entre os registros de representação algébricos e geométricos não é explorada. De fato, na exposição teórica, o estudante pode observar os vários registros de representação de limites, todavia as atividades propostas não estimulam a conversão entre esses registros. Dessa forma, o estudante pode ter dificuldades em perceber como os registros estão interligados, pois são apresentados de forma estanque.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

| 96 |

Neste estudo, buscou-se analisar a forma de abordagem dos conceitos relativos à “limites de Função de Uma Variável Real” em três livros de Cálculo. Percebeu-se, pelos resultados apresentados no item anterior, que Simonns (1987) e Guidorizzi (2003) apresentam os vários registros de representação na exposição teórica, contudo supervalorizam as manipulações algébricas nos exercícios, não explorando satisfatoriamente as outras formas de representação e o processo de *conversão*. Esse aspecto remete à afirmação de Duval (2003) de que o *tratamento* é mais valorizado nas atividades matemáticas.

Já na obra de Stewart (2009), verificou-se a utilização de uma abordagem que estimula a transição entre as várias linguagens matemáticas tanto na exposição teórica como nas atividades práticas, o que pode contribuir para que o estudante, de acordo com Duval (2003), compreenda, efetue e controle a diversidade de processos matemáticos propostos numa situação de ensino, adotando, portanto, uma abordagem cognitiva.

Nesse aspecto, os pesquisadores compreendem que as observações e resultados obtidos podem suscitar discussões de como o conteúdo e a forma de abordagem dos livros-textos influenciam as escolhas didáticas do professor e, nesse processo, investigar os fatores que geram os altos índices de reprovação na disciplina de Cálculo no curso em que atuam, analisando

as dificuldades de aprendizagem matemática dos estudantes, por meio das atividades que exploram as transformações semióticas do tipo *conversão*.

Por se tratar de uma pesquisa realizada tendo como foco um curso de formação de professores, as reflexões dos pesquisadores sobre o ensino-aprendizagem dos conceitos matemáticos não se limitam apenas ao Cálculo, pois, se os estudantes são estimulados a desenvolver a capacidade de mobilizar de forma eficaz os vários processos e representações matemáticas, eles poderão se apropriar desse caminho metodológico não só na resolução de problemas do cálculo, mas também em outras disciplinas como geometria, álgebra, análise, etc. Além disso, a discussão sobre esse tipo de abordagem abre possibilidades para que eles possam também aplicar esse conhecimento na sua prática profissional, influenciando positivamente a forma de pensar de seus futuros alunos.

No decorrer da pesquisa, algumas questões surgiram, delineando-se como novas possibilidades de investigação:

- Como o conteúdo e a forma de abordagem dos livros-textos influenciam as escolhas didáticas do professor?
- Como a utilização das transformações de registro do tipo *conversão* contribuem para compreensão conceitual das ideias do cálculo?
- Quais abordagens conceituais facilitam a compreensão das ideias do cálculo?

| 97 |

A busca de respostas a essas questões sinaliza outros desenhos metodológicos de pesquisa de abordagem qualitativa além da bibliográfica, como *pesquisa-ação*, *estudos de campo* ou *de caso*.

A partir do trabalho realizado, também foi possível refletir que as disciplinas de conteúdos matemáticos, ao proporcionarem aos alunos – futuros educadores matemáticos – a vivência de estratégias de aprendizagem diferenciadas, associada à discussão sobre o processo de ensino-aprendizagem dos conceitos, podem minimizar a visão separatista entre disciplinas *pedagógicas* e *específicas*, que muitas vezes se estabelece nos cursos de formação inicial de professores de matemática, estabelecendo uma relação mais estreita e dialógica entre teoria e prática, de modo a contribuir para a construção e consolidação do projeto pedagógico do curso no qual os pesquisadores atuam.

REFERÊNCIAS

BERRY, J. S.; NYMAN, M. A. Promoting students' graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behavior* (22), 2003. pp. 481-497.

COUY, Lais. *Pensamento visual no estudo da variação de funções*. 2008. 160 f. Dissertação (Mestrado). Curso de Ensino de Matemática, Puc Minas, Belo Horizonte, 2008. Disponível em: <http://server05.pucminas.br/teses/EnCiMat_CouyL_1.pdf>. Acesso em: 07 abr. 2010.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. (Org.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*, 2003.

FROTA, Maria Clara Rezende. *O pensar matemático no ensino superior: concepções e estratégias de aprendizagem dos alunos*. 2002. 287 f. Tese (Doutorado), UFMG, Belo Horizonte, 2002.

| 98 |

KARRER, Monica. *Transformações lineares: a problemática das tarefas que têm o gráfico como registro de partida*. (2007, julho) Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/ComunicacaoCientifica/Trabalhos/CC09715887830T.doc>. Acesso em: 21 jan. 2011.

FERENHOF, Helio Aisenberg; FERNANDES, Roberto Fabiano. Desmistificando a revisão de literatura com base na redação científica. Método SSF. *Revista ACB: Biblioteconomia em Santa Catarina, Florianópolis, SC*: v. 21, n. 3, p. 550-563, ago./nov., 2016. Disponível em: <[file:///C:/Users/Pichau/Downloads/Dialnet-DesmistificandoAREvisaoDeLiteraturaComoBaseParaRed-6868195%20\(1\).pdf](file:///C:/Users/Pichau/Downloads/Dialnet-DesmistificandoAREvisaoDeLiteraturaComoBaseParaRed-6868195%20(1).pdf)>. Acesso em: 1 out. 2020.

FINNEY, Ross L; WEIR, Maurice D; GIORDANO, Frank R. *Cálculo*. George B. Thomas. 10. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2003.

FLEMING, D. M; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A: função de uma variável*. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2007.

GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC. Vol. I. 2007.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo; ALMEIDA, Marcio Vieira de. Material para o ensino de cálculo diferencial de integral: continuidade e diferen-

ciabilidade. *Vidya Revista Eletrônica* (ISSN 2176-4603) – versão on-line. Santa Maria – Rio Grande do Sul (Brasil), v. 37, n. 2., jul./dez., 2017, p. 383-396. Disponível em: <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/2008/1950>. Acesso em: 1 set. 2020.

LACHINI, Jonas. Subsídios para explicar o fracasso dos alunos em cálculo. In: LACHINI, Jonas, LAUDARES, João Bosco (Orgs.). *Educação matemática: a prática educativa sob o olhar dos professores de cálculo*, Belo Horizonte, Editora Fumarc, 2001.

LEVY, Yair; ELLIS, Timothy J. A systems approach to conductan effective literature review in support of information systems research. *Informing Science: International Journal of na Emerging Transdiscipline*, v. 9, n. 1, p. 181-212, 2006. Disponível em <http://www.inform.nu/Articles/Vol9/V9p-181-212Levy99.pdf>. Acesso em 04/10/2020.

RASMUSSEN, C.; MARRONGELLE, K.; BORBA, M. C. Research on calculus: what do we know and where do we need to go? *ZDM: Mathematics Education*, v. 46, n. 4, p. 507-515, 2014. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-014-0615-x>>. Acesso em: 20 set. 2020.

SANTOS, Angela Rocha Dos; BIANCHINI, Waldecir. *Aprendendo cálculo com o Maple: cálculo de uma variável*. Rio de Janeiro: LtC, 2002. 428 p.

| 99 |

SIMMONS, G. F. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: Makron Books, 1987. v. I.

STEWART, J. *Cálculo*. Tradução da 6. ed. norte-americana. São Paulo: Cengage Learning, 2009. v. I.

TALL, David. *Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus*, Mathematics Education Research Centre, University of Warwick, U.K., 1991.

TALL, David. *How humans learn to think mathematically*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

